ΛΥΣΕΙΣ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2006

ΘΕΜΑ 1ο

Χρόνια υπηρεσίας x	[0-10)	[10-20)	[20-30)	[30-40)	Σύνολο
Εργαζόμενοι ν_i	10	α	20	5	35 + α
Κέντρο κλάσης x_i	5	15	25	35	…….

α)

$$\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{k}\nu_i x_i = \frac{5\cdot 10 + \alpha\cdot 15 + 20\cdot 25 + 35\cdot 5}{35+\alpha} \Leftrightarrow 19 = \frac{50 + \alpha\cdot 15 + 500 + 175}{35+\alpha}$$

$19(35 + \alpha) = 725 + 15\alpha$

$665 + 19\alpha = 725 + 15\alpha$

$19\alpha - 15\alpha = 725 - 665$

$4\alpha = 60$

$\alpha = 15$

β)

Χρόνια υπηρεσίας x	[0-10)	[10-20)	[20-30)	[30-40)	Σύνολο
Εργαζόμενοι ν_i	10	α	20	5	35 + α
Κέντρο κλάσης x_i	5	15	25	35	…….
Συχνότητα vi	10	15	20	5	50
Αθροιστική συχνότητα	10	25	45	50	…….
Σχετική συχνότητα %	20	30	40	10	100

γ)

10 + 15 + 20 = 45

δ)

40% +10% = 50%

ΘΕΜΑ 2ο

α)

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2 + \lambda x - 3) = 1^2 + \lambda\cdot 1 - 3 = \lambda - 2$

β)

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(2x - \lambda) = 2\cdot 1 - \lambda = 2 - \lambda$

γ)

Θα πρέπει να ισχύει $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lambda - 2 = 2 - \lambda = \lambda - 2$

$$\lambda - 2 = 2 - \lambda$$
$$2\lambda = 4$$
$$\lambda = 2$$

δ)

Για $\lambda = 2$ έχουμε ότι $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \le 1 \\ 2x - 2\,, & x > 1 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 + 2x - 3 - 0}{x - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+3)(x-1)}{x-1} =$$
$$= \lim_{x\to 1^-}(x+3) = 1 + 3 = 4$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x - 2 - 0}{x - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \ne \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, η f δεν είναι παραγωγίσισμη στο $x_o = 1$

ΘΕΜΑ 3ο

α)

$f\,'(x) = 2x - 6 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = x^2 - 6x + c\,, \ c \in \mathbb{R}$ **(1)**

Η (1) για $x = 0$ δίνει $f(0) = c$

Άρα $5 = c$

Η (1) $\Leftrightarrow \quad f(x) = x^2 - 6x + 5$

β)

(i) $f\,'(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ 2x - 6 = 0 \ \Leftrightarrow \ 2x = 6 \ \Leftrightarrow \ x = 3$

$f\,'(x) > 0 \ \Leftrightarrow \ 2x - 6 > 0 \ \Leftrightarrow \ 2x > 6 \ \Leftrightarrow \ x > 3$

$f'(x) < 0 \iff 2x - 6 < 0 \iff 2x < 6 \iff x < 3$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 3]$

(ii) Σύμφωνα με τα παραπάνω η f παρουσιάζει ελάχιστο για x = 3 το

$f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = 9 - 18 + 5 = -4$

γ)

$f''(x) = (2x - 6)' = (2x)' - 6' = 2 - 0 = 2$

Άρα $f''(2) = 2$ και $f''(-3) = 2$

ΘΕΜΑ 4ο

α)

$S(2) = 5 \cdot 2^2 = 20$ m

β)

$S(t) = 45 \iff 5t^2 = 45 \iff t^2 = 9 \iff t = 3$ δεδομένου ότι $t > 0$

γ)

(i) $\upsilon(t) = S'(t) = (5t^2)' = 10t$

(ii) $\upsilon(3) = 10 \cdot 3 = 30$ m/sec